Hough 変換

Mikio Morii

June 28, 2023

1 平面内の直線検出

$x_1 = (\rho, 0)^T$, $x_2 = (\rho, 1)^T$ $(\rho \geq 0)$ を通る直線 l を原点の周りに $\theta \in [0, 2\pi)$ だけ回転させた直線 l' の方程式を求めてみる。このように生成した直線 l' は平面内の全ての直線を表すことができる。回転行列は、

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

なので、

$$x_1' = Mx_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$x_2' = Mx_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

直線 l' の方程式は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_1' + t(x_2' - x_1') = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

ただし、$t \in R$. この式から t を消去すると、

$$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{5}$$

となる。これが Hough 変換の式である。

各 pixel(x, y) に対して、(ρ, θ) の 2 次元平面内の曲線が一本対応する。全 pixel に渡って、この曲線を描く。最後に、最も多くの曲線が交わった点が、平面内の直線に対応する。

2　平面 $\times$ 時間の 3 次元空間内の直線検出

イメージを $x-y$ 平面とし、時間方向を z 軸とする。$x_1=(\rho,0,0)^T$, $x_2=(\rho,0,1)^T$ $(\rho \geq 0)$ を通る直線 l を原点の周りにオイラー角で回転させた直線 l' の方程式を求めてみる。このように生成した直線 l' は 3 次元空間内の全ての直線を表すことができる。直線 l を、z 軸の周りに $\phi \in [0,2\pi]$、x 軸の周りに $\theta \in [0,\pi/2]$、z 軸の周りに $\psi \in [0,2\pi]$、だけ、この順に 3 回、回転させる。これらの回転行列は、

$$M_z(\phi)=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$M_x(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$M_z(\psi)=\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_z(\psi)M_x(\theta)M_z(\phi)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{9}$$

直線 l' の方程式は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_1' + t(x_2' - x_1') = \rho\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi \\ \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \sin\psi\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ただし、$t \in R$.

この式から、t を消去すると、

$$\rho\cos\phi = x\cos\psi + y\sin\psi \tag{11}$$

$$\rho\sin\phi = -x\sin\psi\cos\theta + y\cos\psi\cos\theta + z\sin\theta \tag{12}$$

となる。これが Hough 変換の式である。

θ は、移動速度に相当する。θ を固定すると、各 pixel(x,y,z) に対して、(ρ,ϕ,ψ) の 3 次元空間内の曲線が一本対応する。全 pixel に渡って、この曲線を描く。最後に、最も多くの曲線が交わった点が、移動天体の軌跡の直線に対応する。